

ΜΑΘΗΜΑ 13

1.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Σύνθεση συναρτήσεων

Θεωρία – Σχόλια – Ασκήσεις

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

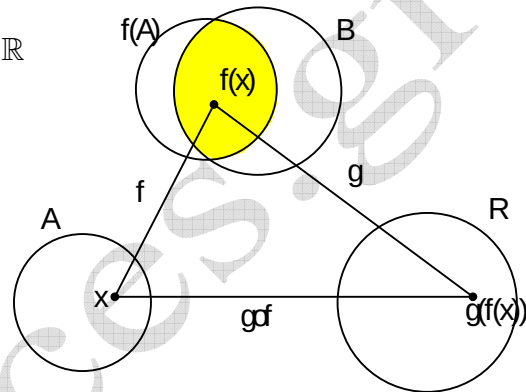
Έστω οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$

Το τυχαίο $x \in A$, με την f αντιστοιχίζεται στην τιμή $f(x) \in f(A)$.

Αν η τιμή αυτή $f(x) \in B$, με τη g θα αντιστοιχίζεται σε τιμή $g(f(x))$.

Έτσι προκύπτει νέα συνάρτηση, με την οποία το x αντιστοιχίζεται, κατ' ευθείαν, στην τιμή $g(f(x))$.

Αυτή η νέα συνάρτηση λέγεται σύνθεση της f με τη g και συμβολίζεται $g \circ f$.



2.

Πεδίο ορισμού και τύπος της $g \circ f$

- Από τον ορισμό προκύπτει ότι $D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$
- $D_{g \circ f} \subseteq D_f$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.

Παρατήρηση

Στη σύνθεση $g \circ f$, πρώτα λειτουργεί η f (ας γράφεται δεύτερη).

2.

Εύρεση του τύπου $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$

Στον τύπο $y = g(x)$ της g , θέτουμε όπου x το $f(x)$

3.

Η προσεταιριστική ιδιότητα

Ισχύει $(\text{ho}(\text{gof}))(x) = ((\text{hog})\text{of})(x)$

Όχι όμως πάντοτε η αντιμεταθετική. Γενικά είναι $(\text{gof})(x) \neq (\text{fog})(x)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Αν $f(x) = \ln(2-x)$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$, να βρεθεί η gof .

Προτεινόμενη λύση

$$2-x > 0 \Leftrightarrow x < 2. \quad \text{Άρα } D_f = (-\infty, 2)$$

$$x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1. \quad \text{Άρα } D_g = [1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} D_{\text{gof}} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x < 2 \mid \ln(2-x) \geq 1\} \\ &\stackrel{*}{=} \{x < 2 \mid x \leq 2-e\} = (-\infty, 2-e] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \quad \ln(2-x) \geq 1 &\Leftrightarrow \ln(2-x) \geq \ln e \\ &\quad 2-x \geq e \\ &\quad x \leq 2-e \end{aligned}$$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(\ln(2-x)) = \sqrt{\ln(2-x)-1}$$

2.

Αν $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$, να βρεθεί η gof .

Προτεινόμενη λύση

$$x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2 \quad \text{Άρα } D_f = [2, +\infty)$$

$$x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1 \quad \text{Άρα } D_g = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\begin{aligned} D_{\text{gof}} &= \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 2 \mid \sqrt{x-2} \neq 1\} \\ &= \{x \geq 2 \mid x-2 \neq 1\} \\ &= \{x \geq 2 \mid x \neq 3\} = [2, 3) \cup (3, +\infty) \end{aligned}$$

$$(\text{gof})(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-2}) = \frac{1}{\sqrt{x-2}-1}$$

3.

Αν $(g \circ f)(x) = 2x + 1$ και $g(x) = e^x$, να βρεθεί η συνάρτηση f .

Προτεινόμενη λύση

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = 2x + 1 \quad (1)$$

Στον τύπο $g(x) = e^x$ θέτουμε όπου x το $f(x)$

$$\begin{aligned} g(f(x)) = e^{f(x)} &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} 2x + 1 = e^{f(x)} > 0 \\ f(x) &= \ln(2x + 1) \text{ με } 2x + 1 > 0 \\ f(x) &= \ln(2x + 1) \text{ με } x > -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4.

Αν $(g \circ f)(x) = \ln x$ και $g(x) = x^2$, να βρεθεί η συνάρτηση f .

Προτεινόμενη λύση

$$D_{g \circ f} = (0, +\infty), \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = \ln x \quad (1)$$

Στον τύπο $g(x) = x^2$ θέτουμε όπου x το $f(x)$

$$\begin{aligned} g(f(x)) = [f(x)]^2 &\stackrel{(1)}{\Rightarrow} \ln x = [f(x)]^2 \geq 0 \Leftrightarrow \\ f(x) &= \sqrt{\ln x} \text{ με } \ln x \geq 0 \text{ ή } f(x) = -\sqrt{\ln x} \text{ με } \ln x \geq 0 \\ f(x) &= \sqrt{\ln x} \text{ με } x \geq 1 \text{ ή } f(x) = -\sqrt{\ln x} \text{ με } x \geq 1 \end{aligned}$$

5.

Αν $(g \circ f)(x) = 1 - x^2$ και $f(x) = x + 1$, να βρεθεί η συνάρτηση g .

Προτεινόμενη λύση

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = 1 - x^2 \Rightarrow g(x + 1) = 1 - x^2 \quad (1)$$

Στην (1) θέτουμε $x + 1 = u$, οπότε $x = u - 1$

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow g(u) = 1 - (u - 1)^2 \\ g(u) &= 1 - u^2 + 2u - 1 \\ g(u) &= -u^2 + 2u, \quad u \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

6.

Αν $(g \circ f)(x) = x + e^{1-x}$ και $f(x) = e^x$ να βρεθεί η συνάρτηση g .

Προτεινόμενη λύση

$$D_{g \circ f} = \mathbb{R}, \quad D_f = \mathbb{R}, \quad g(f(x)) = x + e^{1-x} \Rightarrow g(e^x) = x + e^{1-x} \quad (1)$$

Στην (1) θέτουμε $e^x = u > 0$, οπότε $x = \ln u$

$$(1) \Rightarrow g(u) = \ln u + e^{1-\ln u}$$

$$g(u) = \ln u + e^{\ln e - \ln u}$$

$$g(u) = \ln u + e^{\ln \frac{e}{u}}$$

$$g(u) = \ln u + \frac{e}{u}, \quad u > 0$$

7.

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(x^2 - 4x + 2)$.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } x^2 - 4x + 2 \in [2, +\infty) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 \geq 2$$

$$x^2 - 4x \geq 0$$

$$x(x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \quad \text{ή} \quad x \geq 4$$

$$\text{Άρα } D_g = (-\infty, 0] \cup [4, +\infty)$$

8.

Αν η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[2, +\infty)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = f(3 + \ln x)$.

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Για να ορίζεται ο } \ln x, \text{ πρέπει } x > 0 \quad (1)$$

$$\text{Επίσης πρέπει } 3 + \ln x \in [2, +\infty) \Leftrightarrow 3 + \ln x \geq 2$$

$$\ln x \geq -1$$

$$\ln x \geq \ln e^{-1} \Leftrightarrow x \geq e^{-1} \quad (2)$$

$$\text{Συναλήθευση των (1), (2) } \Rightarrow D_g = [e^{-1}, +\infty)$$

9.

Για τους μιγαδικούς z, w και τη συνάρτηση $f(x) = (1 + |z|^2)x + |z| - |w|$ δίνεται ότι $(f \circ f)(x) = 16x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w κινούνται σε γνωστούς κύκλους.

Προτεινόμενη λύση

Για τη διευκόλυνσή μας, θέτουμε $|z| = \lambda$ και $|w| = \mu$.

Τότε $f(x) = (1 + \lambda^2)x + \lambda - \mu$

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= (1 + \lambda^2)f(x) + \lambda - \mu \\ &= (1 + \lambda^2)[(1 + \lambda^2)x + \lambda - \mu] + \lambda - \mu \\ &= (1 + \lambda^2)^2 x + (1 + \lambda^2)(\lambda - \mu) + \lambda - \mu \\ &= (1 + \lambda^2)^2 x + (\lambda - \mu)(1 + \lambda^2 + 1) \\ &= (1 + \lambda^2)^2 x + (\lambda - \mu)(\lambda^2 + 2) \end{aligned}$$

$(f \circ f)(x) = 16x$ για κάθε $x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$(1 + \lambda^2)^2 x + (\lambda - \mu)(\lambda^2 + 2) = 16x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$(1 + \lambda^2)^2 = 16$ και $(\lambda - \mu)(\lambda^2 + 2) = 0$

$1 + \lambda^2 = 4$ και $\lambda - \mu = 0$

$\lambda^2 = 3$ και $\lambda = \mu$

$|z|^2 = 3$ και $|z| = |w|$

$|z| = \sqrt{3}$ και $|w| = \sqrt{3}$

Άρα οι εικόνες των z, w κινούνται στον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{3}$

10.

Έστω οι μιγαδικοί $z, w \neq 0$ και οι συναρτήσεις $f(x) = x + |z|$, $g(x) = 2|w|x + 1$.
Αν $f \circ g = g \circ f$ και οι C_f, C_g τέμνονται σε σημείο που έχει τετμημένη 1,
να αποδείξετε ότι οι εικόνες των z, w κινούνται σε γνωστούς κύκλους.

Προτεινόμενη λύση

Θέτουμε $|z| = \lambda$ και $|w| = \mu$, όπου $\lambda, \mu > 0$, οπότε $f(x) = x + \lambda$, $g(x) = 2\mu x + 1$

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \text{ομοίως} = \mathbb{R}$$

$$f \circ g = g \circ f \Leftrightarrow f(g(x)) = g(f(x))$$

$$g(x) + \lambda = 2\mu f(x) + 1$$

$$2\mu x + 1 + \lambda = 2\mu(x + \lambda) + 1$$

$$2\mu x + 1 + \lambda = 2\mu x + 2\mu\lambda + 1$$

$$1 = 2\mu\lambda \quad (1)$$

$$C_f, C_g \text{ τέμνονται σε σημείο που έχει τετμημένη } 1 \Leftrightarrow f(1) = g(1)$$

$$1 + \lambda = 2\mu + 1$$

$$\lambda = 2\mu \quad (2)$$

$$\text{Σύστημα των (1), (2)} \quad \begin{cases} 2\mu\lambda=1 \\ \lambda=2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu \cdot 2\mu=1 \\ \lambda=2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\mu^2=1 \\ \lambda=2\mu \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu=\frac{1}{2} \\ \lambda=2\mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu=\frac{1}{2} \\ \lambda=1 \end{cases}$$

$$\text{Άρα } |z| = 1 \text{ και } |w| = \frac{1}{2}$$

Επομένως ο z κινείται στον κύκλο $(O, 1)$ και ο w στον κύκλο $\left(O, \frac{1}{2}\right)$

11.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x-1) = x^2 + x - 3$. Να βρείτε την τιμή $f(x+1)$ συναρτήσει του x .

Προτεινόμενη λύση

Στη δοσμένη ισότητα, όπου $x-1$ θέτουμε $u+1$.

Δηλαδή $x-1 = u+1$ άρα $x = u+2$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε παίρνουμε } f(u+1) &= (u+2)^2 + (u+2) - 3 \\ &= u^2 + 4u + 4 + u + 2 - 3 \\ &= u^2 + 5u + 3 \end{aligned}$$

Όπου u θέτουμε x . Οπότε $f(x+1) = x^2 + 5x + 3$

12.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x^3) = [f(x)]^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Προτεινόμενη λύση

Θυμίζουμε ότι: αν $\kappa = \lambda$ τότε $f(\kappa) = f(\lambda)$

$$(f \circ f)(x) = x^3 \Rightarrow f(f(x)) = x^3 \quad (1)$$

$$\text{Σύμφωνα με την υπενθύμιση, η (1)} \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x^3) \quad (2)$$

$$\text{Στην (1), όπου } x \text{ θέτουμε } f(x) \text{ και παίρνουμε } f(f(f(x))) = [f(x)]^3 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2), (3)} \Rightarrow f(x^3) = [f(x)]^3$$

13.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) = x^5$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(x^5) = f^5(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Υπόδειξη.

Ακολουθήσε την άσκηση 12.

14.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) = x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x - 2) = f(x) - 2$

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x) - 2) = 5$

Προτεινόμενη λύση

i)

$$(f \circ f)(x) = x - 2 \Rightarrow f(f(x)) = x - 2 \quad (1)$$

$$f(f(f(x))) = f(x - 2) \quad (2)$$

$$\text{Θέτοντας όπου } x \text{ το } f(x) \text{ η (1)} \Rightarrow f(f(f(x))) = f(x) - 2 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2), (3)} \Rightarrow f(x - 2) = f(x) - 2 \quad (4)$$

ii)

$$\text{Θέτοντας όπου } x \text{ το } f(x) \text{ η (4)} \Rightarrow f(f(x) - 2) = f(f(x)) - 2 \stackrel{(1)}{\Rightarrow}$$

$$f(f(x) - 2) = x - 2 - 2$$

$$f(f(x) - 2) = x - 4$$

$$\text{Η εξίσωση } f(f(x) - 2) = 5 \Leftrightarrow x - 4 = 5 \Leftrightarrow x = 9$$

15.

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει $(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1$,

$x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$

Προτεινόμενη λύση

$$(f \circ f)(x) = x^2 - x + 1 \Rightarrow f(f(x)) = x^2 - x + 1 \quad (1)$$

Σύμφωνα με την υπενθύμιση στην άσκηση 11, η (1) $\Rightarrow$

$$f(f(f(x))) = f(x^2 - x + 1)$$

$$\text{και για } x = 1 \text{ παίρνουμε } f(f(f(1))) = f(1^2 - 1 + 1) \Rightarrow$$

$$f(f(f(1))) = f(1) \quad (2)$$

Όπου x , στην (1), θέτουμε $f(1)$, οπότε

$$f(f(f(1))) = [f(1)]^2 - f(1) + 1 \quad (3)$$

$$\text{Από τις (2), (3)} \Rightarrow [f(1)]^2 - f(1) + 1 = f(1)$$

$$[f(1)]^2 - 2f(1) + 1 = 0$$

$$[f(1) - 1]^2 = 0$$

$$f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$$

16.

Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = x^2 - 3x + 4$ και $g(f(2)) = 2$.

Να αποδείξετε ότι $f(2) = g(2) = 2$.

Προτεινόμενη λύση

$$f(f(x)) = x^2 - 3x + 4 \quad (1)$$

Σύμφωνα με την υπενθύμιση στην άσκηση 11, η (1) $\Rightarrow$

$$f(f(f(x))) = f(x^2 - 3x + 4)$$

και για $x = 2$ παίρνουμε $f(f(f(2))) = f(2^2 - 3 \cdot 2 + 4) \Rightarrow$

$$f(f(f(2))) = f(2) \quad (2)$$

Όπου x , στην (1), θέτουμε $f(2)$, οπότε

$$f(f(f(2))) = [f(2)]^2 - 3f(2) + 4 \quad (3)$$

Από τις (2), (3) $\Rightarrow [f(2)]^2 - 3f(2) + 4 = f(2)$

$$[f(2)]^2 - 4f(2) + 4 = 0$$

$$[f(2) - 2]^2 = 0$$

$$f(2) - 2 = 0 \Rightarrow f(2) = 2 \quad (4)$$

Η υπόθεση $g(f(2)) = 2 \xrightarrow{(4)} g(2) = 2$